262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Soit $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

I) Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires

1) Convergence presque sûre

Définition 1 : On dit que $(X_n)_n$ converge vers X presque sûrement, noté $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X$, si $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

Exemple 2 : Pour $X_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, on a $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

Proposition 3 : Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ continue, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} f(X)$.

Lemme 4 (Borel-Cantelli) : Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements. DEV 1

1) Si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(A_n \,;\, i.o.) = 0$

2) Si les A_n sont 2-à-2 indépendants et $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(A_n \,;\, i.o.) = 1$

Corollaire 5 : Si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X$.

Application 6 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} p$.

2) Convergence en probabilités

Définition 7 : On dit $(X_n)_n$ converge en probabilités vers X, noté $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; \|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exemple 8 : Soit $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$, $\forall n \geq 1$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Proposition 9 : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème 10 : Soit L^0 l'espace des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ défini à égalité presque sûre et $\forall X, Y \in L^0$, $d(X,Y) = \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1]$.
Alors (L^0, d) est un espace métrique complet.

Théorème 11 : 1) Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

2) Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors on peut en extraire une sous-suite vérifiant $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s.} X$.

Exemple 12 : Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ et $Y_n = X \mathbb{1}_{[0,n[}(X) + e^{2n} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}(X)$. Alors $Y_n \xrightarrow{p.s.} X$ donc $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Contre-exemple 13 : Soit $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$ suite de variables aléatoires indépendantes. Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$.

Proposition 14 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ continue, alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.

3) Convergence dans L^p

Définition 15 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(X_n)_n$ converge vers X dans L^p, noté $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si $\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème 16 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

2) Si $1 \leq q \leq p$ et $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$.

Exemple 17 : Si $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$, alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$

Contre-exemple 18 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ définies par $\mathbb{P}(X_n = n^3) = \frac{1}{n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$.
Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{L^1} 0$ car $E(X_n) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \neq 0$.
De plus, $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ par le lemme de Borel-Cantelli.

Proposition 19 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $(X_n)_n$ est bornée dans L^p (i.e. $\exists M > 0, \forall n \geq 0, E(|X_n|^p) \leq M$) alors $\forall q \in [1, p[$, $X_n \xrightarrow{L^q} X$.

4) Convergence en loi

Définition 20 : On dit que $(X_n)_n$ converge vers X en loi, noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si $\forall f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue bornée, $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$.

Remarque 21 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ n'implique pas $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$.

Contre-exemple 22 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_n = X$ et $Y_n = -X$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ mais $X_n + Y_n = 0 \not\xrightarrow{\mathcal{L}} X + X \sim \mathcal{N}(0,4)$.

Proposition 23 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, alors $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$.

Théorème 24 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\underbrace{\mathbb{P}(X_n \leq x)}_{F_{X_n}(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est continue.

Exemple 25 : Soit $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$. Alors $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ qui n'est pas une fonction de répartition car pas continue à droite en 0. Or, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ car $\mathbb{P}(0 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Proposition 26 : Si $(X_n)_n$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors s'équivalent :
1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$
3) $\forall u \in [0, 1[$, $E(u^{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(u^X)$

Corollaire 27 : Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} n p_n = \lambda > 0$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

Proposition 28 : Soit $(X_n)_n$ de densité $(f_n)_n$ et X de densité f. Si $f_n \to f$ simplement (ou presque partout), alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Contre-exemple 29 : Soit $(X_n)_n$ de densité $f_n(x) = 1 - \cos(2\pi n x)$ sur $[0,1]$.
Alors $F_n(x) = x - \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{U}([0,1])$ mais $(f_n)_n$ ne converge pas.

Théorème 30 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Contre-exemple 31 : Soit $X_n \sim \mathcal{B}(p)$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{B}(p)$ mais $X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} X$ car $(X_n)_n$ n'est pas de Cauchy pour la distance d.

Proposition 32 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ où $a \in \mathbb{R}$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Théorème 33 (Lévy) : Soit $(X_n)_n$, X de fonction caractéristique $(\phi_n)_n$ et ϕ. Alors : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \phi_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_X(x)$.

Théorème 34 (Slutsky) : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, a)$

Corollaire 35 : Sous les mêmes hypothèses, $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a$ et $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX$.

II) Théorèmes limites et applications

1) Loi des grands nombres

Théorème 36 (loi faible des grands nombres) : Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans L^2.
Alors : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}/L^2} E(X_1)$.

Théorème 37 (Loi forte des grands nombres dans L^1) : On suppose de plus que les X_n sont dans L^1. Alors : $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$.

Corollaire 38 : Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants de probabilité p. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{P}(A_1) = p$.

Théorème 39 (Loi forte des grands nombres) : On suppose seulement que les X_n sont dans L^1. Alors $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$.

Application 40 (Méthode de Monte-Carlo) : Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[0,1]$ et $(U_n)_n$ est une suite de v.a. iid $\mathcal{U}([0,1])$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(U_k) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(g(U_1)) = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Application 41 (Méthode des moments) : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre λ inconnu. On souhaite estimer λ. D'après le théorème 39, $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}_\lambda - p.s.} \mathbb{E}(X_1) = \lambda$. Ainsi, $\overline{X_n}$ est un estimateur fortement consistant de λ.

Plus généralement, si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$ et Φ est une fonction vérifiant $\mathbb{E}_\theta(|\Phi(X_1)|) < +\infty, \forall \theta \in \Theta$, alors $\hat{g}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi(X_k)$ est un estimateur fortement consistant de $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\Phi(X_1))$.

2) Théorème central limite

Théorème 42 (Théorème central limite) : Soit $(X_n)_n$ suite de v.a. iid d'espérance m et de variance σ^2. Alors : DEV2

$$\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Corollaire 43 : Soit $(A_n)_n$ suite d'événements indépendants de proba p. Alors $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k} - p\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$.

Contre-exemple 44 : Soit $X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{C}(0,1)$. Alors, $\forall n$, $X_n \notin L^1$ et $\overline{X_n} \sim \mathcal{C}(0,1)$ mais $\forall \alpha_n, \beta_n$, $\alpha_n \overline{X_n} + \beta_n \overset{\mathcal{L}}{\not\to} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Application 45 : Pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue périodique,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Application 46 (Intervalle de confiance) : Soit $(X_n)_n$ suite de réalisations de v.a. iid suivant $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0,1[$ inconnu. On souhaite estimer p. Alors $\left[\overline{X_n} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]$, où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \overline{X_n}(1-\overline{X_n})$, est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ i.e. DEV2

$$\mathbb{P}_p\left(p \in \left[\overline{X_n} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha.$$